

§ 6.9 Espaces vectoriels avec produit scalaire

Idée: généraliser le produit scalaire usuel (dans $\mathbb{R}^n$) à un esp. vecto V .

(NPO: évaluation cours)

Séance
RaQ.

vendredi 17
janvier 2025

Déf 6.9.1: Soit V un espace vectoriel $[14^h \text{ à } 16^h]$
(de dim quelconque, y compris $\dim(V) = +\infty$)
on appelle produit scalaire sur V , toute fonction

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto u \cdot v$$

(autres notations
 $(u|v), \langle u|v \rangle, \dots$)

qui vérifie les cond. suivantes:

1) $u \cdot v = v \cdot u$ (symétrie)

2) $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

3) $(\lambda u) \cdot v = \lambda (u \cdot v) = u \cdot (\lambda v)$

linéarité

$u, v, w \in V$

$\lambda \in \mathbb{R}$

4) $u \cdot u \geq 0_{\mathbb{R}}$ (positivité)

5) $u \cdot u = 0_{\mathbb{R}} \iff u = 0_V$ (non dégénéré)



une fonction qui vérifie 1) 2) 3)
s'appelle une forme bilinéaire symétrique

Cela signifie, que $\forall v \in V$ fixé

la fonction $V \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire

$$u \mapsto u \cdot v$$

(et $u \mapsto v \cdot u$ aussi)

Ex 6.9.2 :

0) $V = \mathbb{R}^n$ $u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ $\checkmark$ PS usuel

1) $V = \mathbb{P}_n$ pol. de degré $\leq n$

et soient $t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$

$n+1$ points distincts $t_i \neq t_j$
b) $i \neq j$.

$\forall p(t), q(t) \in \mathbb{P}_n$ on pose

$$\langle p | q \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n p(t_i) q(t_i) \in \mathbb{R}$$

est
un PS

(ex : vérifiez 1) $\rightarrow$ 5) pour ce $\uparrow$)
(facultatif)

$$1') \quad t_0 = -1 \quad t_1 = 0 \quad t_2 = 1$$

$$\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, q) \mapsto \langle p | q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

$$2) \quad V = M_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ on } \text{pave}$$

$$\langle A | B \rangle = \text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii}$$

est un PS.

$$3) \quad V = C([a, b]) \quad a < b \in \mathbb{R}$$

$\simeq$ fonct. continues sur $[a, b]$

$$\forall f, g \in C([a, b]) \text{ on } \text{pave}$$

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt \in \mathbb{R}$$

$$(\triangle! \dim(V) = +\infty)$$

$$\langle f | f \rangle = \int_a^b f^2(t) dt \geq 0$$

défini un PS sur V .

3') $V = C([0, 2\pi]) \leftarrow$ très utilisée
en théorie du signal.

Remarque 6.9.3 : Si V est muni d'un P.S.

alors on peut définir les notions de

- longueur/norme d'un $v \in V$: $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$
- Cauchy-Schwarz : $= \sqrt{v \cdot v}$

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V$$

- Inégalité du Δ :

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$$

- orthogonalité : $u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$

- angles entre u, v (grâce à C-S)

$$\left(\theta = \arccos \left(\frac{\|u\| \|v\|}{|u \cdot v|} \right) \right)$$

- le Thm. de projection orthogonale :

Si $W \subset V$ et $\dim(W)$ est finie

alors il existe une T.L

$\text{proj}_W : V \rightarrow V$ telle que

tg $\text{Im}(\text{proj}_W) = W$

$$\text{Ker}(\text{proj}_W) = W^\perp = \left\{ v \in V \mid \begin{array}{l} v \cdot w = 0 \\ \forall w \in W \end{array} \right\}$$

et il existe une décomp. unique $\forall v \in V$

$$v = \underbrace{\text{proj}_W(v)}_{\in W} + \underbrace{z}_{\in W^\perp}$$

(et $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim V$)

— le procédé de Gram-Schmidt s'applique
si W est de dim finie: alors W possède
une base
orthogonale

càd $\exists w_1, \dots, w_p \in W$ avec $w_i \perp w_j$
(càd $w_i \cdot w_j = 0$)

— les formules

$$1) \text{proj}_W(v) = \sum_{i=1}^p \left(\frac{v \cdot w_i}{w_i \cdot w_i} \right) w_i$$

si $\{w_1, \dots, w_p\}$ est une base orthog. de W

2) l'alg. de Gram-Schmidt restent variables

Fin Rem 6.9.3

Exemple 6.9.4 : $V = C([0, 2\pi])$

$$\mathcal{F} = \left\{ \cos(nt), \sin(mt) \mid \begin{array}{l} 0 \leq n, m \leq n_0 \\ m \neq 0 \end{array} \right\}$$

^{entiers}
↑
fixé

famille orthogonale
dans $C([0, 2\pi])$.

C'est une base orthogonale (mais pas orthonormée)

de $W = \text{Vect}(\mathcal{F})$ pour le produit scalaire
sur V défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$:

$$\text{si } n_1 \neq n_2$$
$$\langle \cos(n_1 t), \cos(n_2 t) \rangle = \int_0^{2\pi} \cos(n_1 t) \cos(n_2 t) dt = 0$$

$$\text{si } m_1 \neq m_2 \quad (m_i \neq 0)$$
$$\langle \sin(m_1 t), \sin(m_2 t) \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(m_1 t) \sin(m_2 t) dt = 0$$

et $\forall k \neq 0$ on a

$$\langle \cos(kt), \cos(kt) \rangle = \int_0^{2\pi} \cos^2(kt) dt = \pi$$

$$\langle \sin(kt), \sin(kt) \rangle = \int_0^{2\pi} \sin^2(kt) dt = \pi$$

puis $\forall n, m > 0$

$$\langle \cos(nt), \sin(mt) \rangle = \int_0^{2\pi} \cos(nt) \sin(mt) dt = 0$$

et pour $n=0$ $\cos(nt) = 1 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$

$$\text{et donc } \langle 1, 1 \rangle = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Utilité: Coeff. de Fourier d'une fonction

Soit $f \in C([0, 2\pi])$ et $W = \text{vect}(\mathcal{F})$

avec $\mathcal{F}$ base orthogonale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ci-dessus

Alors la formule 1) plus haut s'applique. n_0 fixe

$$\text{proj}_W(f) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + a_2 \cos(2t) + \dots + a_{n_0} \cos(n_0 t) \\ + b_1 \sin(t) + b_2 \sin(2t) + \dots + b_{n_0} \sin(n_0 t)$$

$$\text{ou } \frac{a_0}{2} = \frac{\langle f, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{\int_0^{2\pi} f(t) dt}{2\pi} \quad (\text{NB: } 1 = \cos(0t))$$

$$a_k = \frac{\langle f, \cos(kt) \rangle}{\underbrace{\langle \cos(kt), \cos(kt) \rangle}_{= \pi}}$$

$$b_k = \frac{\langle f, \sin(kt) \rangle}{\underbrace{\langle \sin(kt), \sin(kt) \rangle}_{= \pi}}$$

cà d

$$a_k = \int_0^{2\pi} \frac{f(t) \cos(kt) dt}{\pi}$$

$$a_0 = \int_0^{2\pi} \frac{f(t) dt}{\pi}$$

$$b_k = \int_0^{2\pi} \frac{f(t) \sin(kt) dt}{\pi}$$

les a_0, a_k, b_k s'appellent

les coefficients de Fourier de f

et permettent d'approximer f
avec une fonction de W

plus de détails : Analyse n avec $n \geq 2$.
fin 6.9.4

Même si $V = \mathbb{R}^n$ on peut avoir d'autres produits
scalaires que le p.s. usuel :

Déf. 6.9.5 : Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. On pose

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

$$u \cdot_A v := u \cdot (Av)$$

↑
bon vieux p.s. usuel.

NB : Si $A = I_n$ on retrouve le p.s. usuel (banallement)

Rappel: $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{PS usuel}}}{x} \cdot y = x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{produit matriciel}}}{\overset{1 \times n}{x^T}} \underset{\substack{n \times 1}}{y} \stackrel{*}{=} y^T x = y \cdot x$$

($*$ vient du fait que $a = a^T \quad \forall a \in \Pi_{1 \times 1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$)
et $(AB)^T = B^T A^T$

Rem. 6.9.6: pour $u, v \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\begin{aligned} u \cdot_A v &\stackrel{\text{def}}{=} u \cdot (Av) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rappel}}}{u^T} (Av) \stackrel{*}{=} (Av)^T u = \\ &= v^T A^T u \stackrel{\substack{\downarrow \\ \text{rappel}}}{=} v \cdot (A^T u) \stackrel{\text{def}}{=} v \cdot_{A^T} u \end{aligned}$$

On en conclut que $u \cdot_A v = v \cdot_{A^T} u \quad (\forall u, v \in \mathbb{R}^n)$
si et seulement si $A = A^T$
càd A est symétrique

Donc, pour A symétrique la fonction

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto u^T A v$$

vérifie 1) 2) 3)

de la définition
d'un produit

Def. 6.9.1 scalaire

on doit encore voir si $u^T A u = u^T A u \geq 0$?

Remarque : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} u^T A u &= (u_1, u_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix} \\ &= -u_1^2 - u_2^2 < 0 \quad (\text{si } u_1 \text{ ou } u_2 \neq 0) \end{aligned}$$

on doit donc chercher des A (sym) tq

$$u^T A u \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

Def 6.9.7 : Pour $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ sym. ($A = A^T$)

on dit que A est définie positive si

$$u^T A u = u^T A u \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

Pour mieux comprendre la condition ci-dessus
et savoir quand elle est vérifiée
on étudie plus en profondeur les

Chap 7: Matrices symétriques et formes quadratiques (réelles)

§ 7.1 Diagonalisation des matrices sym.

Def. 7.1.1 (Important), Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ carrée
(a priori quelconque)

On dit que A est orthogonalement diagonalisable
s'il existe

— une matrice orthogonale $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$
(donc $P^{-1} = P^T$)

— une matrice diagonale $D \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

telles que $A = P D P^T$ (càd $A = P D P^{-1}$
et $D = P^{-1} A P$)

Ainsi A est orthogonalement diagonalisable

$\Leftrightarrow$ A est diagonalisable

et $\mathbb{R}^n$ possède une base orthonormée
de vecteurs propres de A .

Rem: Si A est orthog. diagonalisable, alors
 A est forcément symétrique!

En effet, $\exists P$ orthogonale et D diagonale + q

$$A = P D P^T \Rightarrow$$

$$A^T = (P D P^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = P D P^T = A$$

$\uparrow$
 $D = D^T$ car D diagonale.

Ce qui est vraiment surprenant (voire miraculeux)
c'est que la réciproque est vraie (sur $\mathbb{R}$):

Rem: Une matrice diagonalisable A
possède toujours une base de $\mathbb{R}^n$
formée de vect. propres de A

et on peut toujours orthoormer une base de $\mathbb{R}^n$
(via Gram-Schmidt par exemple)

mais en général en orthogonalisant
on n'obtient plus une base de vecteurs propres de A

Voici le miracle qui se passe sur $\mathbb{R}$:

Théorème 7.1.2 (Diagonalisation matrices symétriques)

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

(Important)

- 1) Si $A = A^T$ et $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ sont des vect. propres de A associés à des val. propres λ_1, λ_2 avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (val. propres distinctes)

alors $v_1 \perp v_2$

(donc les espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2} sont orthogonaux).

- 2) A est orthogonalement diagonalisable $\Leftrightarrow A = A^T$

- 3) Si $A = A^T$, alors

i) Toutes les val. propres de A sont réelles
en particulier A possède n valeurs propres complexes avec leur multiplicité
(ce sont les racines de $\chi_A(t)$)

ii) $\forall \lambda \in \text{Spc}(A) \subset \mathbb{R}$ (càd λ val. propre de A)
on a $\dim(E_\lambda) = \text{mult}(\lambda)$

iii) $E_\lambda \subset E_\mu^\perp$ si $\lambda \neq \mu$

4) Si $A=A^T$ on a la décomposition spectrale de A

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \dots + \lambda_n u_n u_n^T$$

où $(u_1, \dots, u_n)$ est une base orthonormée (ordonnée) de $\mathbb{R}^n$ et u_i est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_i \in \text{Sp}(A)$.

(Fin 13.1)